1.5 *Kettingregel*

Dit hoofdstuk gaat over het differentiëren van functies als:

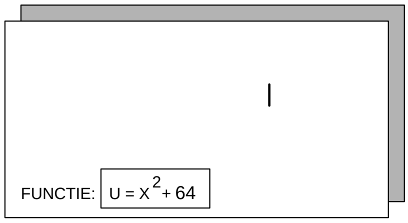
$y = \sqrt{x^2 + 64}$

$y = \sin(x^2)$

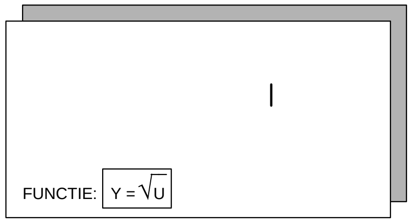
$y = \dfrac{1}{\cos^4(3x)}$

enz., kortom over het differentiëren van kettingfuncties.
De regel die hierop betrekking heeft, de zogenaamde *kettingregel*, kan worden duidelijk gemaakt met behulp van machines. Hieronder zie je twee van zulke

A



B



'machines'.
De afspraak is nu dat de 'uitvoer' van machine A als 'invoer' van B wordt gekozen. Zo is bij de invoer $x = 6$ op machine A, de uitvoer $u = 100$. Deze waarde, als invoer bij B gebruikt, levert daar de uitvoer $y = 10$ op. Schematisch:

$$\begin{array}{ccccc} x & & u & & y \\ 6 & \xrightarrow{\quad A \quad} & 100 & \xrightarrow{\quad B \quad} & 10 \end{array}$$

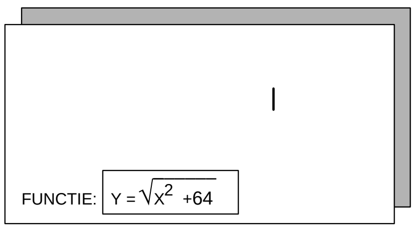
1.38 We gaan nu de invoer van A een beetje veranderen, bijvoorbeeld +0,1 dus invoer
x = 6,1. Kort gezegd: $\Delta x = 0,1$.

a Ga na dat bij kleine verandering van $\Delta x = 0,1$ vanuit de stand $x = 6$ geldt:
$\Delta u \approx 12 \cdot \Delta x$ en $\Delta y \approx 0,05 \cdot \Delta u$

b De bewering van a houdt verband met: $\dfrac{du}{dx} = 12$ voor $x = 6$ en $\dfrac{dy}{du} = 0,05$ voor $u = 10$.
Hoe kun je hieruit $\dfrac{dy}{dx}$ berekenen voor $x = 6$?

De afspraak 'uitvoer A = invoer B' voor de machines A en B uit het vorige voorbeeld, komt neer op het schakelen van die twee machines. De aan elkaar geschakelde machines A en B kunnen worden vervangen door één machine C.

C



In opgave 1.40 heb je gezien hoe je $\frac{dy}{dx}$ kunt berekenen voor $x = 6$ door vermenigvuldiging van de differentiaalquotiënten $\frac{du}{dx}$ en $\frac{dy}{du}$.
Dat zijn de differentiaalquotiënten van de beide schakels waaruit de functie $y = \sqrt{x^2 + 64}$ is opgebouwd. Dit geldt natuurlijk niet alleen voor $x = 6$, maar voor elke waarde van *x*.
In formule:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du}} \longleftarrow \textit{kettingregel}$$

In woorden:

de verandering van *y* ten opzichte van *x* =
de verandering van *u* ten opzichte van *x*
maal
de verandering van *y* ten opzichte van *u*.

1.39 Bekijk nogmaals de functie $y = \sqrt{x^2 + 64}$

a Bereken $\frac{dy}{dx}$ voor $x = 4$.

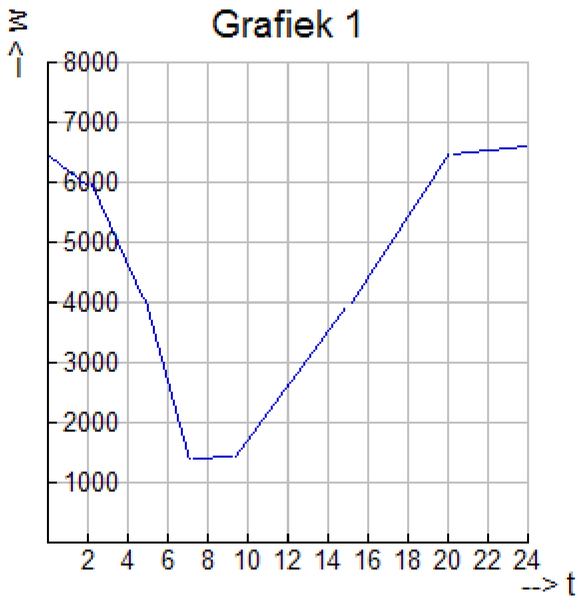
b Laat zien dat voor *x* = 9 geldt: $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{\sqrt{145}}$ en dat voor *x* = 10 geldt: $\frac{dy}{dx} = \frac{10}{\sqrt{164}}$

c Heb je enig idee hoe $\frac{dy}{dx}$ kan worden uitgedrukt in *x*?

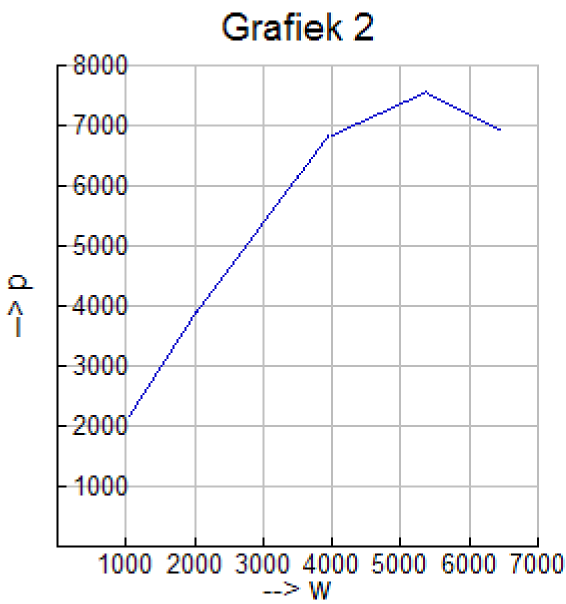
Voor je nu verder leert, hoe je de kettingregel kunt gebruiken in uiteenlopende situaties, eerst nog een tweede voorbeeld om de kettingregel duidelijk te maken.

1.40 Een groot bedrijf werd getroffen door een hevige griepgolf. Toen de epidemie zijn top bereikte, was zo'n 80% van het totale werknemersbestand geveld door de griep. In de volgende figuur (I) zie je de grafiek van het aantal aanwezige werknemers (= *w*) als functie van de tijd in dagen (= *t*) in de dagen na het uitbreken van de epidemie.

a Hoeveel werknemers telt het bedrijf ongeveer?
b Wanneer was het ziekteverzuim het grootst?
c Wanneer nam het ziekteverzuim het sterkst toe?



1.41 De bedrijfsleider was de eerste dagen nauwelijks verontrust door het ziekteverzuim. Hij beschikte namelijk over de gegevens betreffende de produktie (= p) als functie van het aantal werknemers (zie grafiek II).



a Verklaar waarom de bedrijfsleider de eerste dagen nog niet zo somber gestemd was.

b Hoeveel dagen na het uitbreken van de epidemie bereikte de produktie een maximum?

c Schets de grafiek van p als functie van t (voor de desbetreffende periode van 22 dagen).

Let nog eens op het verband tussen w en t (grafiek I). In drie punten van de grafiek is de helling gemeten. Resultaat:

t	w	$\frac{dw}{dt}$
2	6200	–300
4	4500	–1200
10	1800	300

a Welke betekenis kun je hechten aan de getallen in de derde kolom (dus aan -300, -1200, 300)?

Ook in grafiek II is op drie plaatsen de helling gemeten. Resultaat:

w	p	$\frac{dp}{dw}$
6200	7190	–0,1
4500	6750	0,6
1800	3670	1,7

b Beredeneer dat op het tijdstip $t = 4$ de produktie afnam met 720 stuks per dag.
c Op het tijdstip $t = 10$ nam de produktie weer toe. In welke mate?
d Nam de produktie op het tijdstip $t = 2$ toe of af? In welke mate?
e Welk verband bestaat er tussen $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ en $\frac{dp}{dw}$?

De kettingregel zegt dat je het differentiaalquotiënt van een kettingfunctie kunt bepalen door de differentiaalquotiënten van de schakels te berekenen en die met elkaar te vermenigvuldigen.
Daarbij zullen de schakels functies zijn die *direct* te differentieren zijn, dus bijvoorbeeld machtsfuncties, veeltermfuncties, sinus of cosinus.

Neem $y = \sqrt{x^2 + 64}$ ofwel $y = (x + 64)^{\frac{1}{2}}$

Als ketting genoteerd:

$$x \longrightarrow x^2 + 64 \longrightarrow (x^2 + 64)^{\frac{1}{2}}$$

Als we de uitvoer van de eerste schakel u noemen, dan is de invoer van de tweede schakel ook te schrijven als u

$$\begin{array}{ccccc} x & \longrightarrow & x^2 + 64 & \longrightarrow & (x^2 + 64)^{\frac{1}{2}} \\ & & \| & & \| \\ & & u & \longrightarrow & u^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} x & \longrightarrow & x^2 + 64 & \longrightarrow & (x^2 + 64)^{\frac{1}{2}} \\ & & \| & & \| \\ & & u & \longrightarrow & u^{\frac{1}{2}} \\ & & & & \| \\ & & & & y \end{array}$$

Die laatste uitvoer noemen we ook y. Het complete schema wordt nu:

We berekenen voor $u = x^2 + 64$ het differentiaalquotiënt $\frac{du}{dx}$ en van $y = u^{\frac{1}{2}}$ het differentiaalquotiënt $\dfrac{dy}{du}$.

Resultaat: $\dfrac{du}{dx} = 2x$ en $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$

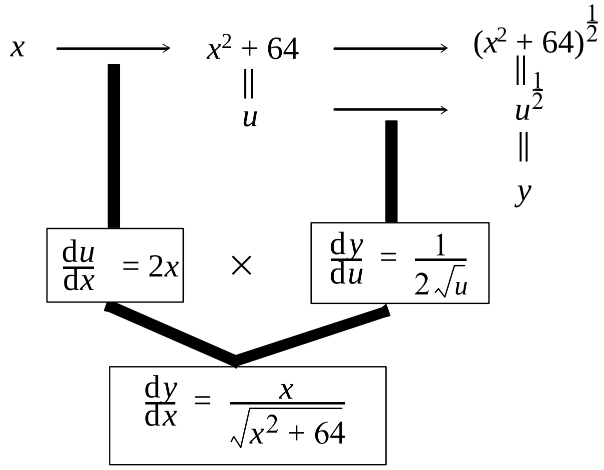
Die twee vermenigvuldigd levert $\dfrac{dy}{dx}$ op.

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{u}}$$

Omdat we $\dfrac{dy}{dx}$ graag willen uitdrukken in x, vervangen we u door $x^2 + 64$.

Er komt dan $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 64}}$.

In schema:



1.42 Gegeven is de functie $y = \sin(x^2)$.

Vier leerlingen vonden vier verschillende antwoorden voor $\dfrac{dy}{dx}$.

Dit zijn die vier antwoorden:

(1)	$\dfrac{dy}{dx} = \sin(2x)$	(3)	$\dfrac{dy}{dx} = \cos(2x)$
(2)	$\dfrac{dy}{dx} = \cos(x^2)$	(4)	$\dfrac{dy}{dx} = 2x \cdot \cos(x^2)$

Als je goed naar de antwoorden kijkt, zie je wel hoe elk van die leerlingen gedacht heeft.

a Schrijf bij elk van de vier antwoorden op, hoe de gedachtengang (vermoedelijk) is geweest.

b Welk van de vier antwoorden is het juiste? Waarom?

1.43 Bekijk onderstaande ketting:

$$x \longrightarrow x^2 + x + 1 \longrightarrow (x^2 + x + 1)^{-1}$$

a Stel $u = x^2 + x + 1$ en $y = u^{-1}$ en bereken $\frac{du}{dx}$ en $\frac{dy}{du}$.

b Druk vervolgens $\frac{dy}{dx}$ uit in x.

1.44 Bereken $\frac{dy}{dx}$ voor:

a $y = (5x+2)^3$

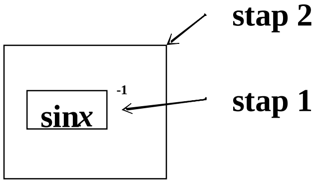
b $y = \sqrt{4-x}$

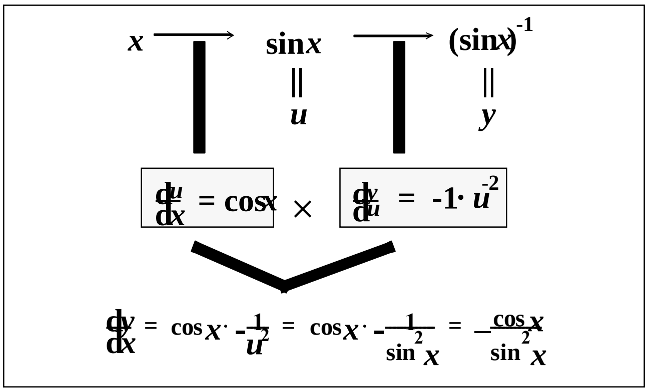
c $y = (2-\sqrt{x})^{-1}$

Bij het toepassen van de kettingregel zijn er twee manieren: 'van binnen naar buiten' en 'van buiten naar binnen'.

manier 1:

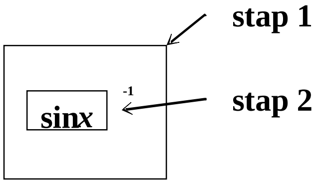
'van binnen naar buiten':

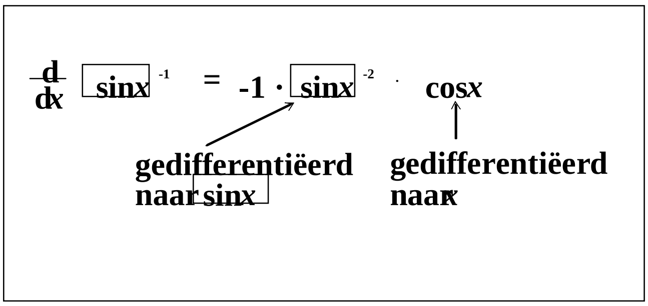




manier 2:

'van buiten naar binnen':





1.45 Vergelijk de bovenstaande manieren om de kettingregel toe te passen. Kies de methode die je het beste ligt en bereken achtereenvolgens:

a $\frac{d}{dx}(\cos^3 x)$ b $\frac{d}{dx}(\frac{1}{\cos^2 x})$ c $\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{\sin x})$

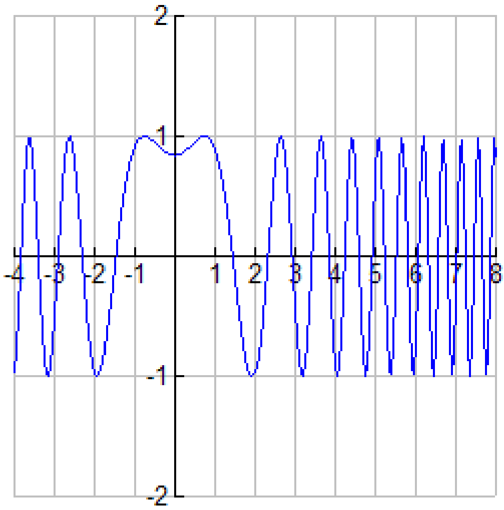
1.46 Gegeven de functie $y = \sin(x^2 + 1)$. In de tabel staan de hellingscoëfficiënten voor x = 1,2, . . ,10.

Verder zijn ook de waarden van $\sin(x^2 + 1)$ en $\cos(x^2 + 1)$ voor x = 1, 2, ..., 10 afgedrukt.

	(1)	(2)	(3)
x	$\sin(x^2+1)$	$\frac{d}{dx}$	$\cos(x^2+1)$
1	0,909	–0,832	–0,416
2	–0,959	1,134	0,284
3	–0,544	–5,033	–0,839
4	–0,961	–2,202	–0,275
5	0,763	6,489	0,647
6	–0,644	9,223	0,765
7	–0,262	13,534	0,965
8	0,827	–9,010	–0,562
9	0,313	17,067	0,950
10	0,452	17,950	0,892

a Deel de uitkomsten van kolom (2) achtereenvolgens door de bijbehorende uitkomsten van kolom (3). Had je het resultaat kunnen voorspellen?

b Hieronder zie je de grafiek van de $y = \sin(x^2 + 1)$.



Hoe kun je aan de formule zien dat de grafiek symmetrisch moet zijn?

c Je ziet dat de 'schommelperiode' steeds kleiner wordt, naarmate je vanuit 0 meer naar rechts gaat. Hoe kun dat verklaren met behulp van de formule?

d De grafiek snijdt de y-as in een punt P met horizontale raaklijn. Laat zien hoe je dit kunt concluderen uit de hellingfunctie.

e In het plaatje zie je nog een aantal punten met horizontale raaklijn. Bereken de x-coördinaten van de twee punten met horizontale raaklijn die het dichtst bij P liggen.

1.47 Differentieer $y = \left(f(x)\right)^3$ naar x, achtereenvolgens voor:

a	$f(x) = x^2 + 4$	c	$f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$
b	$f(x) = \sin x$	d	$f(x) = \sqrt[3]{1-x}$

De kettingregel moet vaak worden toegepast in combinatie met som-, verschil-, of produktregel.

Voorbeeld:

Gegeven: $y = \sqrt[3]{1 + 2x} + 2\sqrt{3 + x^2}$

Gevraagd: $\dfrac{dy}{dx}$

Oplossing: y is de som van twee functies die ieder met de kettingregel worden gedifferentieerd.

$$y = (1 + 2x)^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot (3 + x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \cdot (1 + 2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3\sqrt[3]{(1 + 2x)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{3 + x^2}}$$

1.48 Bereken $\dfrac{dy}{dx}$ als:

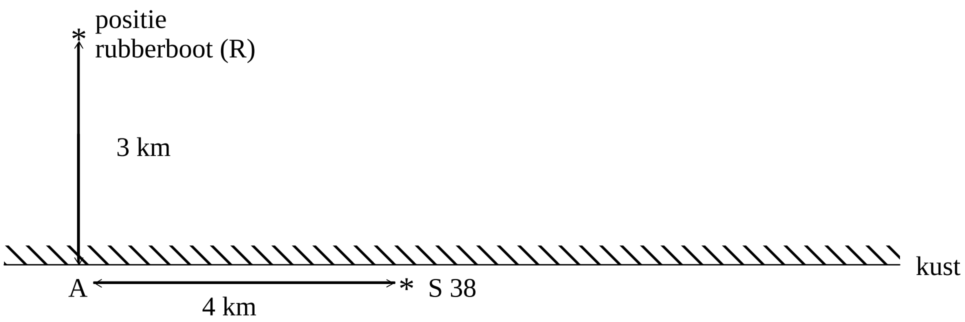
a	$y = \sqrt{x^2 - 4x} + 5x$	c	$y = 5x - \sqrt{x^2 - 4x}$
b	$y = \sqrt{x^2 - 4x} - 5x$	d	$y = 5x \cdot \sqrt{x^2 - 4x}$

1.49 Bereken $\dfrac{dy}{dx}$ als:

a	$y = \sin(x^2) + \cos(x^3)$	c	$y = \sin x \cdot \sqrt{\cos x}$
b	$y = \sin(x^2) \cdot \cos(x^3)$	d	$y = \sqrt{\sin x \cdot \cos x}$

1.50 Agent 007 is op 3 km afstand van de kust gedropt. Met een rubberboot wil hij de kust bereiken om bij strandpaal 38 een geheime boodschap achter te laten. Natuurlijk is het zaak dat hij zo snel mogelijk dit klusje klaart. Met de rubberboot kan hij zich roeiend verplaatsen met een snelheid van 4 km/u. Het water is zo rustig dat de vaarrichting niet van invloed is op zijn snelheid. Op het strand kan hij een lange poos een snelheid van 8 km/u volhouden.

In onderstaande situatieschets zie je nog dat de strandpaal 4 km verwijderd is van de plaats (A) op het strand die James Bond zou bereiken als hij de kortste weg naar het strand zou nemen.



a Veronderstel dat James Bond inderdaad de kortste weg naar het strand neemt en 4 km loopt. Hoeveel tijd heeft hij nodig om paal 38 te bereiken?

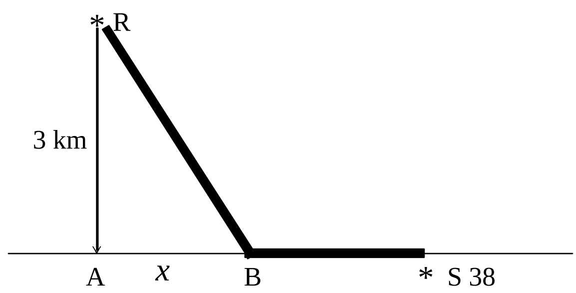
b Hoeveel tijd heeft hij nodig als hij in schuine richting rechtstreeks naar de strandpaal roeit?

Misschien kan hij tijd sparen door ergens tussen A en paal 38 aan land te gaan.

c Stel dat hij precies halverwege (dus op 2 km van paal 38) de kust bereikt. Hoeveel minuten tijdwinst boekt hij ten opzichte van de vorige routes?

1.51 Met behulp van differentiaalrekening kun je de snelste weg voor James Bond berekenen. Stel dat hij *x* km van A aan land gaat (plaats B).De tijd *t* (in minuten) die nodig is om S38 te bereiken is een functie van *x*. Vandaar dat we noteren: *t*(*x*).

d Laat zien dat geldt:

$t(x) = 15\sqrt{9+x^2} + 30 - 7\tfrac{1}{2}x$	

e Bereken $t'(x)$ en los op:

$t'(x) = 0$

f Bereken (in seconden nauwkeurig) de minimale tijd die James Bond nodig heeft om paal 38 te bereiken.

g Welke hoek moet bij de snelste route de vaarkoers RB maken met de lijn RA?

h Verandert het antwoord op de vorige vraag als S38 meer dan 4 km van A af ligt?

Een functie die een ketting is van drie of meer schakels kan ook met de kettingregel worden aangepakt.

Voorbeeld: $y = \dfrac{1}{\cos^4(3x)}$

Oplossing: Volgens de van ‘binnen naar buiten’ methode:

$$\boxed{\boxed{\cos \boxed{3x}}}^{-4}$$

1 2 3

$$x \longrightarrow 3x \longrightarrow \cos(3x) \longrightarrow \cos^{-4}(3x)$$

$$3x = u, \quad \cos(3x) = w, \quad \cos^{-4}(3x) = y$$

$$\boxed{\frac{du}{dx} = 3} \times \boxed{\frac{dw}{du} = -\sin u} \times \boxed{\frac{dy}{dw} = -4w^{-5}}$$

$$= 3 \cdot (-\sin u) \cdot (-4w^{-5})$$

$$= 3 \cdot (-\sin 3x) \cdot (-4\cos^{-5} 3x)$$

$$= \frac{12 \sin 3x}{\cos^5 3x}$$

Oplossing volgens de van ‘buiten naar binnen’ methode:

$$\boxed{\boxed{\cos \boxed{3x}}}^{-4}$$

3 2 1

$$y = \boxed{\cos 3x}^{-4}$$

$$\frac{dy}{dx} = -4 \cdot \boxed{\cos 3x}^{-5} \cdot -\sin 3x \cdot 3$$

gedifferentieerd naar $\boxed{\cos 3x}$ — gedifferentieerd naar $3x$ — gedifferentieerd naar x

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{(\cos 3x)^5} \cdot -3\sin 3x = \frac{12 \sin 3x}{\cos^5 3x}$$

1.52 Kies één van beide methoden en differentieer met behulp van de kettingregel:

a	$y = \sin^3(x^2+1)$	b	$y = \sqrt[4]{\cos\sqrt{x}}$
c	$y = \sqrt{\sin\frac{1}{x}}$	d	$y = \frac{1}{\sin\frac{1}{x}}$

1.5.1 Terugblik

Regel voor het differentiëren van machtsfuncties:

$$\frac{d}{dx}x^r = r \cdot x^{r-1}$$

Kettingregel

Bij een ketting van twee (of meer) functies wordt het differentiaalquotiënt berekend door vermenigvuldiging van de differentiaalquotiënten van elk van de schakels.
Voor een ketting van twee functies betekent dat:

als y een functie is van u en u een functie is van x,
dus als

$$x \longrightarrow u \longrightarrow y$$

dan: $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du}$

1.5.2 Opgaven

a Bereken achtereenvolgens:

$\frac{d}{dx}[(x^2+1)^4]$, $\frac{d}{dx}[\sqrt[4]{(x^2+1)}]$, $\frac{d}{dx}[\frac{1}{(x^2+1)^4}]$

b $f(x) = \sin^3(5x)$
Bereken $f'(0{,}05\pi)$

c In onderstaande figuur zijn getekend de grafieken van $y = x$ (l) en $y = x^{\frac{1}{3}}$ (k)

Aanvankelijk stijgt k sneller dan l, later langzamer.
In welk punt van k vindt de 'ommekeer' plaats (dat wil zeggen, in welk punt heeft k dezelfde hellingscoëfficiënt als l?)